JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ
Netzwerk für Forschung, Lehre und Praxis

Martingale in der Funktionalanalysis

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

BACHELOR OF SCIENCE

in der Studienrichtung

TECHNISCHE MATHEMATIK

Angefertigt am *Institut für Analysis*

Betreuung:

Dipl.-Ing. Dr. Markus Passenbrunner
Dipl.-Math. Dr. rer. nat. Joscha Prochno

Eingereicht von:

Bernhard Pöchtrager

Linz, März 2016

Johannes Kepler Universität
A-4040 Linz · Altenbergerstraße 69 · Internet: http://www.jku.at · DVR 0093696

Abstract

Martingales are playing an important role in the theory of probability, functional analysis and especially in the theory of Banach spaces. In that case the conditional expectation of a stochastic process are being observed. In the first part of this thesis the basics for understanding the meaning of Martingales are illustrated. Subjects like conditional expectation, filtration and adaptedness are defined. In cause of simplification there are only discrete-time Martingales discussed. To make predictions about the behaviour of convergence it is important to prove theorems like the Upcrossing Lemma and Doob's maximal inequality. To give a better view to the definition of Martingales the Haarsystem is discussed as an example in the last part of the thesis.

Zusammenfassung

Martingale sind ein wichtiger Bestandteil der Wahrscheinlichkeitstheorie, Funktionalanalysis und speziell der Banachraumtheorie. Dabei wird die bedingte Erwartung eines stochastischen Prozesses beobachtet. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen für das Verständnis von Martingalen beleuchtet. Begriffe wie bedingte Erwartung, Filtration und Adaptiertheit werden definiert. Aus Gründen der Vereinfachung werden lediglich zeitdiskrete Martingale behandelt. Wichtige Sätze wie das Upcrossing Lemma und die Maximalungleichung von Doob werden zum Treffen von Konvergenzaussagen bewiesen. Um die Definition des Martingals noch etwas einfacher zu veranschaulichen, wird im letzten Teil der Arbeit das Haarsystem als Beispiel genauer diskutiert.

Danksagungen

Es ist mir ein persönliches Bedürfnis mich bei meinen beiden Betreuern, Dr. Markus Passenbrunner und Dr. Joscha Prochno, zu bedanken. Sie haben mir durch Ihre Themenstellung einen vertieften Einblick in einen interessanten Teilbereich der Analysis ermöglicht. Danke sagen möchte ich auch für die Unterstützung beim Verfassen der vorliegenden Arbeit.

Bernhard Pöchtrager
Linz, März 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

Martingale sind ein wichtiger Bestandteil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie finden aber auch in Teilen der Funktionalanalysis, wie der Banachraumtheorie, ihre Anwendung. Grundlage für diese Arbeit bilden die beiden Bücher von [Kle06] und [MS05]. Wir verzichten im folgenden Abschnitt auf Beweise und verweisen diesbezüglich und für weiterführende Informationen auf die oben genannte Literatur. Um eine Vorstellung von Martingalen zu entwickeln, benötigen wir vorerst noch ein wenig Vorarbeit.

1.1 Mengensysteme und Mengenfunktionen

Sei $\Omega \neq \emptyset$ stets eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$[1] eine Familie von Teilmengen. Wir interpretieren die Menge Ω später als Raum von Elementarereignissen. Das System $\mathcal{A}$ gibt hingegen an, welche Ereignisse beobachtbar sind.

Definition 1.1 (σ-Algebra)**.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-Algebra**, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,

2. *falls für jede Menge $A \in \mathcal{A}$, auch $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$ gilt,*

3. *falls für je abzählbar unendlich viele Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Definition 1.2. *Sei A eine Menge. Wir bezeichnen mit*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

*die **Indikatorfunktion** auf der Menge A.*

[1] $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet die Potenzmenge von Ω.

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Satz 1.3. *Es existiert ein kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$:*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \text{ ist } \sigma-Algebra \\ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 1.16. □

Definition 1.4 (Erzeugte σ-Algebra)**.** *Sei $\sigma(\mathcal{E})$ wie in Satz 1.3. Wir bezeichnen $\sigma(\mathcal{E})$ als die von $\mathcal{E}$ **erzeugte σ-Algebra**. $\mathcal{E}$ nennt man dabei **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$.*

Definieren wir nun folgende Mengen

$$\mathcal{I}_1 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$
$$\mathcal{I}_3 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}, \qquad \mathcal{I}_4 := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Definition 1.5 (Borel'sche σ-Algebra)**.** *Die von den halb offenen Intervallen $\mathcal{I}_1$ erzeugte σ-Algebra*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := \sigma(\mathcal{I}_1)$$

*heißt **Borel'sche σ-Algebra** auf $\mathbb{R}$. Die Elemente $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ heißen **Borel'sche Mengen**. Ist $T \subseteq \mathbb{R}$ so ist die Borel'sche σ-Algebra auf T gegeben mit*

$$\mathcal{B}_T := \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap T = \{B \cap T : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Auch die Intervalle $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4$ sind Erzeuger der Borel'schen σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Satz 1.6. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_2) = \sigma(\mathcal{I}_4) = \sigma(\mathcal{I}_3)$.

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 1.23. □

Definition 1.7. *Ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, heißt **Messraum**. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**.*

Definition 1.8 (Maß)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. μ heißt **Maß**, falls μ σ-additiv ist, das heißt für je abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ gilt, dass*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definition 1.9. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt*

1. ***endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$.*

2. ***Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.*

Definition 1.10. *Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**, wenn $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.*
*Gilt zudem $\mu(\Omega) = 1$, so nennt man $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen **Wahrscheinlichkeitsraum**. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ bezeichnen wir auch als **Ereignisse**.*

Satz 1.11 (Lebesgue-Maß)**.** *Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mit der Eigenschaft*

$$\lambda\Big([a,b)\Big) = b - a \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b.$$

*λ heißt **Lebesgue-Maß** auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

Definition 1.12 (Nullmenge)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

1. *Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt μ-**Nullmenge** (oder kurz: Nullmenge), falls $\mu(A) = 0$. Mit $\mathcal{N}_\mu$ bezeichnen wir das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen.*

2. *Sei $E(\omega)$ eine Aussage, die für den Punkt $\omega \in \Omega$ wahr beziehungsweise falsch sein kann. Wir sagen, dass E μ-**fast überall** (f.ü.) gilt, falls es ein $N \in \mathcal{N}_\mu$ gibt, sodass $E(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega \backslash N$ wahr ist.*
   *Ist $\mu = \mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so sagen wir, dass E $\mathbb{P}$-**fast sicher** (f.s.) gilt.*

1.2 Messbare Abbildungen und das Lebesgue-Integral

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume.

Definition 1.13 (Messbare Abbildungen)**.** *Eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar, falls $X^{-1}(\mathcal{A}') := \{X^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$ ist, falls also*

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } A' \in \mathcal{A}'.$$

Bemerkung 1.14. *Ist $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, so schreiben wir $\mathcal{A}$-messbar für $\mathcal{A}-\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-messbar.*

Satz 1.15. *Wird $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E})$ von einem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugt, so ist die Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar, wenn*

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Beweis. Siehe [MS05] Satz 1.24. □

Satz 1.16. *Sei Ω eine nichtleere Menge. Sei I eine beliebige Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein Messraum sowie $X_i : \Omega \to \Omega_i$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $\sigma\Big(\bigcup_{i \in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\Big)$ die kleinste σ-Algebra, bezüglich der jedes X_i messbar ist.*

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 1.78 und Definition 1.79 beziehungsweise [Wen08] Satz 1.6. □

Definition 1.17 (Erzeugte σ-Algebra)**.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 1.16. Dann heißt*

$$\sigma(X_i, i \in I) := \sigma\Big(\bigcup_{i \in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\Big).$$

*die von $(X_i, i \in I)$ **erzeugte σ-Algebra** auf Ω.*

Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definition 1.18. *Seien Ω eine Menge, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen und $x \in \Omega$. Wir verwenden fortan folgende Notationen*

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &:= \max(f(x), g(x)) \\ (f \wedge g)(x) &:= \min(f(x), g(x)) \\ f^+(x) &:= \max(f(x), 0) \\ f^-(x) &:= \max(-f(x), 0) \\ |f| &:= f^+ + f^-. \end{aligned}$$

Definition 1.19. *Sind $f, f_1, f_2, ...$ Abbildungen von $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq ... \text{ und } \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{für jedes } \omega \in \Omega,$$

so schreiben wir $f_n \uparrow f$ und sagen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton aufsteigend gegen f konvergiert. Analog schreiben wir $f_n \downarrow f$, falls $(-f_n) \uparrow (-f)$.

Definition 1.20 (Treppenfunktion)**.** *Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so dass für ein $n \in \mathbb{N}$ und $A_i \in \mathcal{A}$ bzw. $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, gilt:*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{1.1}$$

so heißt f Treppenfunktion.

Wir bezeichnen nun die Menge der Treppenfunktionen mit $\mathcal{T}$, beziehungsweise die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen mit $\mathcal{T}^+$. Ist weiters $\mathcal{M}$ die Menge aller messbaren Funktionen und wiederum $\mathcal{M}^+$ die Menge der nicht-negativen messbaren Funktionen, so definieren wir für $f \in \mathcal{T}^+$ wie in (1.1)

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Ist nun $f \in \mathcal{M}^+$, so gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{T}^+$, so dass gilt $f_n \uparrow f$.[2] Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so eine Folge für $f \in \mathcal{M}^+$, dann definieren wir das Lebesgue-Integral als

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

[2] Siehe [MS05] Lemma 2.3.

Nachdem allgemein für ein messbares $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ die Schreibweise $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+$ gilt, gelangen wir zur allgemeinen Definition.

Definition 1.21 (Lebesgue-Integral)**.** *Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Die Funktion f heißt **(μ-)integrierbar**, falls $\int |f|\, d\mu < \infty$. Ist f (μ-)integrierbar, so ist durch*

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

*das **Lebesgue-Integral** von f definiert. Ist $A \in \mathcal{A}$, so schreiben wir $\int_A f\, d\mu := \int (f\mathbb{1}_A)\, d\mu$. Für mehrfache Integration setzen wir $\int_A f(x)\, d\mu(x) := \int_A f\, d\mu$.*

Bemerkung 1.22. *Sei $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, so verwenden wir für Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die Schreibweise $\int_a^b f(x)\, dx := \int_{[a,b]} f\, d\lambda$.*

Definition 1.23 (Dichte)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-messbar. Wir sagen, dass das durch*

$$\nu(A) := \int (\mathbb{1}_A f)\, d\mu \qquad \text{für } A \in \mathcal{A}$$

*definierte Maß die **Dichte** f bezüglich μ hat.*

Definition 1.24 (absolute Stetigkeit)**.** *Seien μ und ν zwei Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, so heißt ν **absolut stetig** bezüglich μ, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:*

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Satz 1.25 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Seien μ und ν Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Ist μ endlich, dann gilt:*

$$\nu \text{ hat eine Dichte bezüglich } \mu \quad \Leftrightarrow \quad \nu \text{ ist absolut stetig bezüglich } \mu.$$

Beweis. Siehe [MS05] Theorem 2.38. □

1.3 Konvergenzsätze

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum.

Definition 1.26. *Für messbares $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir*

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{falls } p \in [1, \infty).$$

Ferner definieren wir für jedes $p \in [1, \infty)$ den Vektorraum

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ ist messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

Definieren wir $\mathcal{N} := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f = 0 \ \mu\text{−fast überall}\}$, so erhalten wir für $p \in [1, \infty)$ den Quotientenraum

$$L^p := L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}$$

Bemerkung 1.27. *L^2 ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \int f g \, d\mu, \quad f, g \in L^2.$$

Seien nun $f, f_1, f_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbare Funktionen.

Definition 1.28. *Wir sagen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f μ-**fast überall**, in Formeln $f_n \xrightarrow{f.ü.} f$, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{N}_\mu$ gibt, sodass für jedes $\omega \in \Omega \backslash N$ gilt, dass*

$$f_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} f(\omega).$$

*Ist μ ein W-Maß, so sagen wir in diesem Fall auch, dass $(f_n)_{N\in\mathbb{N}}$ **fast sicher** konvergiert und schreiben $f_n \xrightarrow{f.s.} f$.*

Bemerkung 1.29. *Im Folgenden ist mit $f_n \to f$ fast sichere bzw. fast überall Konvergenz gemeint, sofern keine zusätzlichen Informationen angegeben sind.*

Definition 1.30 (L^p-Konvergenz). *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus L^p konvergiert in L^p gegen $f \in L^p$, in Formeln $f_n \xrightarrow{L^p} f$, falls*

$$||f_n - f||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Bemerkung 1.31. *Aus $f_n \xrightarrow{L^1} f$ folgt $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu$.*

Wir stellen uns jetzt folgende Frage. Wie bekommen wir L^1-Konvergenz aus der fast überall Konvergenz? Dafür benötigen wir jetzt den Begriff der gleichgradigen Integrierbarkeit.

Definition 1.32. *Eine Familie $\mathcal{F} \subset L^1$ heißt **gleichgradig integrierbar**, falls*

$$\inf_{0\leq g\in L^1} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>g\}} |f| \, d\mu = 0.$$

Definition 1.33. *Sei $p \in [1, \infty)$. Eine Familie $\mathcal{F} \subset L^p$ heißt **beschränkt** in L^p, falls $\sup\{||f||_p : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ gilt.*

Korollar 1.34. *Ist $\mu(\Omega) < \infty$ und $p > 1$ sowie $\mathcal{F}$ beschränkt in L^p, dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Siehe [Kle06] Korollar 6.21. □

Satz 1.35. *Sei* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^1$. *Ist* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichgradig integrierbar und gibt es eine messbare Abbildung* f *mit* $f_n \xrightarrow{f.ü.} f$, *dann gilt:*

$$f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

Beweis. Siehe [Kle06] Bemerkung 6.5 und Satz 6.25. □

Satz 1.36 (Monotone Konvergenz). *Seien* $f_1, f_2, \ldots \in L^1$ *und* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar. Gilt* $f_n \uparrow f$ *f.ü., dann folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu,$$

wobei beide Seiten den Wert $+\infty$ *annehmen können.*

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 4.20. □

Satz 1.37 (Lemma von Fatou). *Seien* $f \in L^1$ *und* $f_1, f_2, \ldots$ *messbar mit* $f_n \geq f$ *f.ü. für jedes* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 4.21. □

Korollar 1.38 (Majorisierte Konvergenz). *Sei* f *messbar und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* L^1 *mit* $f_n \xrightarrow{f.ü.} f$. *Weiters existiert eine integrierbare Majorante* $0 \leq g \in L^1$ *mit* $|f_n| \leq g$ *f.ü. für jedes* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $f \in L^1$ *und* $f_n \xrightarrow{L^1} f$, *also insbesondere* $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu$.

Beweis. Sie [Kle06] Bemerkung 6.5 und Korollar 6.26. □

1.4 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Im folgenden Abschnitt werden für das Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie relevante Begriffe definiert, wobei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Messraum ist.

Definition 1.39 (Zufallsvariable). *Eine messbare Abbildung* $X : \Omega \to \Omega'$ *heißt* ***Zufallsvariable*** *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $(\Omega', \mathcal{F}')$. *Für* $A' \in \mathcal{F}'$ *verwenden wir die Schreibweisen* $\{X \in A'\} := X^{-1}(A')$ *und* $\mathbb{P}(X \in A') := \mathbb{P}(X^{-1}(A'))$.

Wird der Messraum nicht direkt angegeben, so setzen wir $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Nachdem wir lediglich den diskreten Fall behandeln beschränken wir uns bei der Indexmenge $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{N}_0$.

Definition 1.40 (Stochastischer Prozess). *Eine Familie von Zufallsvariablen $X = (X_i)_{i\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\Omega', \mathcal{F}')$ heißt* ***stochastischer Prozess*** *(mit Zeitbereich I und Zustandsraum Ω').*

Definition 1.41 (Unabhängigkeit). *Seien $A_i \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ und X_i Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für jedes $i \in I$. Dann heißt*

1. *die Familie von Ereignissen $(A_i)_{i\in I}$* ***unabhängig****, falls für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ gilt, dass*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

2. *die Familie von Mengensystemen $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$* ***unabhängig****, falls jede Familie von Ereignissen $(B_i)_{i\in I}$ mit $B_i \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in I$ unabhängig ist.*

3. *die Familie von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$* ***unabhängig****, falls die Familie von Mengensystemen $\big(\sigma(X_i)_{i\in I}\big)$ unabhängig ist.*

Definition 1.42 (Erwartungswert). *Sei $X \in L^1$, so bezeichnen wir*

$$\mathbb{E}(X) := \int X \, d\mathbb{P}$$

als den ***Erwartungswert*** *von X.*

Bemerkung 1.43. *Klarerweise gilt für $X \in L^1$: $\|X\|_1 = \mathbb{E}(|X|)$.*

Satz 1.44 (Produktsatz). *Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängige integrierbare Zufallsvariablen, so gilt:*

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Beweis. Siehe [MS05] Theorem 5.13. □

Satz 1.45 (Jensen'sche Ungleichung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und X eine Zufallsvariable mit Werten in I und $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Ist ϕ konvex, dann gilt $\mathbb{E}\big(\phi(X)^-\big) < \infty$ und*

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) \geq \phi\big(\mathbb{E}(X)\big).$$

Beweis. Siehe [Kle06] Satz 7.9. □

Kapitel 2

Bedingte Erwartung

Seien im folgenden Abschnitt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Sub-σ-Algebra und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Definition 2.1 (Bedingte Erwartung). *Eine Zufallsvariable Y heißt* ***bedingte Erwartung*** *von X gegeben $\mathcal{F}$, symbolisch $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) := Y$, falls gilt:*

1. *Y ist $\mathcal{F}$-messbar.*
2. *Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$.*

Satz 2.2. *$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ existiert und ist fast sicher eindeutig.*

Beweis. **Existenz**
Wir nehmen zunächst an, dass $X \geq 0$ ist. Weiters definiert nun

$$\nu(A) := \int_A X \, d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F},$$

ein Maß auf $\mathcal{F}$. ν ist nach Definition absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$, d.h. aus $\mathbb{P}(A) = 0$ folgt $\nu(A) = 0$. Zusätzlich ist ν endlich, da X nach Voraussetzung integrierbar ist. Nach Satz von Radon-Nikodym (Satz 1.25) existiert nun eine $\mathcal{F}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \nu(A) = \int_A f \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f\mathbb{1}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Damit ist $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = f$ f.s.. Für allgemeines X folgt die Behauptung aus der Gleichheit $X = X^+ - X^-$ und der Linearität des Integrals.

Fast sichere Eindeutigkeit
Hierfür seien $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = Y$ f.s. und $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \tilde{Y}$ f.s.. Weiters sei $A := \{Y > \tilde{Y}\} \in \mathcal{F}$. Nach Definition der bedingten Erwartung gilt:

$$\mathbb{E}\Big((Y - \tilde{Y})\mathbb{1}_A\Big) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\tilde{Y}\mathbb{1}_A) = 0,$$

Angenommen $\mathbb{P}\big(\{Y > \tilde{Y}\}\big) > 0$, dann existiert ein $n > 0$, so dass $\mathbb{P}\big(\{Y \geq \tilde{Y} + \frac{1}{n}\}\big) > 0$.

$$0 = \int_{\{Y>\tilde{Y}\}} Y - \tilde{Y}\, d\mathbb{P} \geq \int_{\{Y\geq\tilde{Y}+\frac{1}{n}\}} Y - \tilde{Y}\, d\mathbb{P} \geq \int_{\{Y\geq\tilde{Y}+\frac{1}{n}\}} \frac{1}{n}\, d\mathbb{P} = \frac{1}{n}\mathbb{P}\big(\{Y \geq \tilde{Y} + \tfrac{1}{n}\}\big) > 0$$

Widerspruch. Somit ist $\mathbb{P}\big(\{Y > \tilde{Y}\}\big) = 0$. Analog folgt $\mathbb{P}\big(\{Y < \tilde{Y}\}\big) = 0$. Das heißt $Y = \tilde{Y}$ fast sicher. □

2.1 Erläuterung der Definition

Zur Erläuterung der Definition beginnen wir mit einem Beispiel zur bedingten Wahrscheinlichkeit.

Beispiel 2.3. *Wir betrachten den Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels und modellieren dazu den Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$\Omega := \{1, ..., 6\}, \qquad \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, \text{ für } A \in \mathcal{A}$$

Dabei symbolisiert $|A|$ die Anzahl der Elemente in A. $\mathbb{P}$ wird auch als Gleichverteilung auf Ω bezeichnet.
Wir sind nun an folgenden Ereignissen interessiert

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Augenzahl kleiner gleich drei}\} = \{1, 2, 3\} \text{ und} \\ B &:= \{\text{Augenzahl ungerade}\} = \{1, 3, 5\} \end{aligned}$$

Wenn wir nun erfahren, dass A bereits eingetreten ist, liegt es nahe, dass wir auf $\{1, 2, 3\}$ erneut eine Gleichverteilung erhalten. Daher definieren wir auf $(A, \mathcal{P}(A))$ ein neues W-Maß $\mathbb{P}_A$ durch

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{|C|}{|A|} \qquad \text{für } C \in \mathcal{P}(A)$$

Jetzt ist dieses Maß jedoch lediglich auf Ereignisse aus $\mathcal{P}(A)$ definiert. Wir können allerdings den Punkten $\Omega \backslash A$ die Wahrscheinlichkeit Null geben, da diese nicht eintreten können, weil A bereits eingetreten ist. Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}_A(C \cap A) = \frac{|C \cap A|}{|A|} = \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \qquad \text{für } C \in \mathcal{P}(\Omega)$$

und insbesondere

$$\mathbb{P}_A(B \cap A) = \frac{|\{1, 3\}|}{|\{1, 2, 3\}|} = \frac{2}{3}.$$

Dieses Beispiel motiviert zu folgender Definition.

Definition 2.4. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A \in \mathcal{A}$*. Dann ist für* $B \in \mathcal{A}$ *die* ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** *unter der Annahme* A *folgendermaßen definiert:*

$$\mathbb{P}(B|A) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} & \text{falls } \mathbb{P}(A) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.1}$$

Bemerkung 2.5. *Die Wahl* $\mathbb{P}(B|A) = 0$ *für* $\mathbb{P}(A) = 0$ *ist willkürlich und spielt keine weitere Rolle.*

Bemerkung 2.6. *Gilt* $\mathbb{P}(A) > 0$*, so ist* $\mathbb{P}(\cdot|A)$ *ein W-Maß auf* $(\Omega, \mathcal{A})$*.*

Sei nun $X \in L^1$ und $A \in \mathcal{A}$, so ist klarerweise auch $\mathbb{1}_A X \in L^1$. Sei weiters $\mathbb{P}(A) > 0$, so ist $P(\cdot|A)$ ein W-Maß. Da $\mathbb{1}_A X \in L^1$ und $\mathbb{P}(A) > 0$, so ist $X \in L^1\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(\cdot|A)\big)$. Das heißt wir können den Erwartungswert von X bezüglich $\mathbb{P}(\cdot|A)$ definieren.

Definition 2.7. *Sei* $X \in L^1$ *und* $A \in \mathcal{A}$*. Dann setzen wir*

$$\mathbb{E}(X|A) := \int X \, d\mathbb{P}(\cdot|A) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbb{P}(A)} & \text{falls } \mathbb{P}(A) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $X = \mathbb{1}_B$ mit $B \in \mathcal{A}$, so gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|A) = \mathbb{P}(B|A)$.
Wir gehen nun einen Schritt weiter.

Satz 2.8. *Sei* I *eine höchstens abzählbare Menge,* $(B_i)_{i\in I}$ *eine Folge paarweiser disjunkter Ereignisse mit* $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$ *und* $\mathcal{F} := \sigma(B_i, i \in I)$*. Wir definieren für* $X \in L^1$ *eine Abbildung* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *durch*

$$Y := \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|B_i)\mathbb{1}_{B_i}.$$

Dann gilt:

1. Y *ist* $\mathcal{F}$*-messbar,*
2. $Y \in L^1$ *und für jedes* $A \in \mathcal{F}$ *gilt* $\int_A Y \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P}$*.*

Das heißt $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|B_i)\mathbb{1}_{B_i}$ *f.s..*

Beweis. 1. Zu zeigen ist, dass Y bezüglich $\mathcal{F}$ messbar ist. Das heißt nach Satz 1.15 und Definition 1.5, dass $Y^{-1}([a,b)) \in \mathcal{F}$ für alle $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ gelten muss. Da Y nach Definition konstant auf B_i für alle $i \in I$ ist, können wir die Indexmenge $J := \{i \in I : \mathbb{E}(X|B_i) \in [a,b)\}$ definieren. Zusammengefasst gilt:

$$Y^{-1}\big([a,b)\big) = \bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{F}.$$

2. Sei $A \in \mathcal{F}$ und $J \subseteq I$ mit $A = \bigcup_{j\in J} B_j$. Sei $J' := \{i \in J : \mathbb{P}(B_i) > 0\}$. Dann ist

$$\int_A Y \, d\mathbb{P} = \sum_{i\in J'} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{E}(X|B_i) = \sum_{i\in J'} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{B_i}) = \int_A X \, d\mathbb{P}$$

□

2.2 Eigenschaften der bedingten Erwartung

Werfen wir einen Blick auf einige elementare Eigenschaften der bedingten Erwartung:

Satz 2.9. *Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y$ integrierbare Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-Algebren und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, so gilt:*

1. ***Linearität**: $E(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{F}) = a_1E(X_1|\mathcal{F}) + a_2E(X_2|\mathcal{F})$ f.s..*
2. ***Monotonie**: Ist $X_1 \geq X_2$ f.s., so ist $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) \geq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F})$ f.s..*
3. *Ist $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ und Y $\mathcal{F}$-messbar, dann ist*
$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(Y|\sigma(Y)) = Y \quad \text{f.s..}$$
4. ***Turmeigenschaft**: $\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big|\mathcal{F}\Big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ f.s..*
5. ***Dreiecksungleichung**: $\Big|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big| \leq \mathbb{E}\Big(|X|\Big|\mathcal{F}\Big)$ f.s..*
6. ***Unabhängigkeit**: Sind $\sigma(X)$ und $\mathcal{F}$ unabhängig, so gilt $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ f.s..*
7. ***Bedingte Version der monotonen Konvergenz**: Ist $X_n \uparrow X$ und $\mathbb{E}(X_1) > -\infty$, so folgt:*
$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \quad \text{fast sicher.}$$
8. ***Bedingte Jensensche Ungleichung**: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\phi(X)$ integrierbar, so gilt:*
$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{F}) \quad \text{f.s.}$$
9. ***Bedingte Erwartung als Projektion**: Sei $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, dann ist $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ die orthogonale Projektion von X auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es gilt also für jedes $\mathcal{F}$-messbare Y mit $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$*
$$\mathbb{E}\left((X - Y)^2\right) \geq \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|F))^2\right)$$
mit Gleichheit genau dann, wenn $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s..

Beweis. 1. Die rechte Seite ist $\mathcal{F}$-messbar und für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((a_1\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) + a_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}))\mathbb{1}_A\Big) &= a_1\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F})\mathbb{1}_A\Big) + a_2\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F})\mathbb{1}_A\Big)\\ &= a_1\mathbb{E}(X_1\mathbb{1}_A) + a_2\mathbb{E}(X_2\mathbb{1}_A)\\ &= \mathbb{E}\Big((a_1X_1 + a_2X_2)\mathbb{1}_A\Big) \quad \text{f.s..}\end{aligned}$$

2. Sei $X := X_1 - X_2$. Damit ist $X \geq 0$ und zu zeigen bleibt unter Verwendung der Linearität $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$. Sei nun $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s.. Angenommen $\mathbb{P}(Y < 0) > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $A := \{Y < -\frac{1}{n}\}$ gilt: $\mathbb{P}(A) > 0$. Daraus folgt:
$$0 \leq \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) \leq -\frac{1}{n}\mathbb{P}(A) < 0.$$
Also ist unsere Annahme falsch und $Y \geq 0$ fast sicher.

3. Sei zunächst $X \geq 0$ und $Y \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $Y_n = 2^{-n}\lfloor 2^n Y\rfloor$[1]. Dann ist $Y_n \uparrow Y$ sowie $Y_n\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \uparrow Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s., da nach der Monotonie in (2) $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$ f.s.. Es gilt nach dem Satz der monotonen Konvergenz (Satz 1.36) für $A \in \mathcal{F}$
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A Y_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A Y\, \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big).$$
Nachdem Y $\mathcal{F}$-messbar ist, ist klarerweise auch Y_n $\mathcal{F}$-messbar und somit auch $A \cap \{Y_n = 2^{-n}k\} \in \mathcal{F}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Daher gilt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A Y_n \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Y_n = 2^{-n}k\}} 2^{-n}k \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Y_n = 2^{-n}k\}} 2^{-n}kX\Big)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y_n X) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y X)\end{aligned}$$
Also ist $\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A Y\, \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A YX)$. Für den allgemeinen Fall schreiben wir $X = X^+ - X^-$ und $Y = Y^+ - Y^-$ und verwenden die Linearität der bedingten Erwartung.
Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil mit $X := 1$ und der Eigenschaft, dass $\mathbb{E}(1|\mathcal{F}) = 1$
$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(1|\mathcal{F}) = Y = \mathbb{E}(Y|\sigma(Y)) \quad \text{f.s..}$$

4. Die zweite Gleichung folgt aus (3) mit $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ f.s. und $X = 1$. Sei nun $A \in \mathcal{G}$, so ist $A \in \mathcal{F}$. Somit gilt
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big) \quad \text{f.s..}$$

5. Da $X \leq |X|$ folgt mit Hilfe der Monotonie $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(|X|\,|\mathcal{F})$ f.s.. Mit $-X \leq |X|$ folgt durch die Monotonie und Linearität $-\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(-X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(|X|\,|\mathcal{F})$ f.s.. Somit gilt $|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X|\,|\mathcal{F})$ f.s..

[1] Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lfloor x\rfloor := \max(k \in \mathbb{Z} : k \leq x)$ die Abrundungsfunktion.

6. Die konstante Funktion $\mathbb{E}(X)$ ist klarerweise messbar bezüglich $\mathcal{F}$ und für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt aufgrund der Unabhängigkeit mit Hilfe des Produktsatzes (Satz 1.44):
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_A\Big) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A).$$

7. Sei $Y_n = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$ f.s.. Aufgrund der Monotonie (2) folgt $Y_i \leq Y_{i+1}$ f.s. für alle $i \in \mathbb{N}$. Somit wissen wir, dass $Y_n \uparrow Y$ f.s, wobei Y $\mathcal{G}$-messbar ist. Sei nun $A \in \mathcal{F}$, so folgt mit Hilfe der monotonen Konvergenz:
$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \int_A X d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A Y_n d\mathbb{P} = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A).$$
Also ist $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s. und die Behauptung damit gezeigt.

8. Jede konvexe Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als:
$$\phi(X) = \sup_{v\in U} v(X) \text{ mit } U := \{v : \exists\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R} : v(t) = a + bt \leq \phi(t)\}.$$
Somit folgt für jede lineare Funktion $v_0 \in U$:
$$\mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\sup_{v\in U} v(X)|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(v_0(X)|\mathcal{G}) = v_0(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \quad \text{f.s..}$$
Nach Anwenden des Supremums über U auf beiden Seiten erhalten wir:
$$\mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}) \geq \sup_{v\in U} v(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \quad \text{f.s..}$$

9. Sei Y messbar bezüglich $\mathcal{F}$. Dann ist mit der Turmeigenschaft (4) und Eigenschaft (3) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})Y)$ f.s. und $\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2)$ f.s.. Somit gilt
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left((X-Y)^2\right) - \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2\right)\\
=&\mathbb{E}\left(X^2 - 2XY + Y^2 - X^2 + 2X\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2\right)\\
=&\mathbb{E}\left(Y^2 - 2Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2\right)\\
=&\mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2\right) \geq 0 \quad \text{f.s..}
\end{aligned}$$

□

Weiters werden wir später noch folgendes Korollar benötigen.

Korollar 2.10. *Sei $p \in [1, \infty)$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Sub-σ-Algebra. Dann ist die Abbildung $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ eine Kontraktion (das heißt: $||\mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_p \leq ||X||_p$) und damit insbesondere stetig.*
Es gilt also für $X, X_1, X_2, ... \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $||X_n - X||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ auch
$$||\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Beweis. Wir wenden die bedingte Version der Jensenschen Ungleichung aus Satz 2.9 mit $\phi(x) = |x|^p$ an. Somit ergibt sich

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F}) \quad \text{f.s..}$$

Sei $\mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F}) = Y$ f.s.. Nachdem nun beide Seiten stets positiv sind, folgt mittels Integration und der p-ten Wurzel die Aussage

$$||\mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_p = \left(\int |\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|^p \, d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int Y \, d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}(Y)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} = ||X||_p.$$

Zu zeigen bleibt nun noch

$$||X_n - X||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow ||\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dazu müssen wir den Term geeignet von oben beziehungsweise unten abschätzen. Hierfür verwenden wir die bereits gezeigte Abschätzung und die Linearität des bedingten Erwartungswertes

$$0 \leq ||\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_p = ||\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{F})||_p \leq ||X_n - X||_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

2.3 Interpretation

Wir können nun $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ als die beste Vorhersage für den Wert X interpretieren, wenn uns die Information aus der σ-Algebra $\mathcal{F}$ zur Verfügung steht. Ist $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$, so kennen wir X bereits und $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ f.s. (Siehe Satz 2.9 (3)). Sind andererseits X und $\mathcal{F}$ unabhängig, so enthält $\mathcal{F}$ keine Information über X. Wie in Satz 2.9 (6) zu sehen, ist die beste Vorhersage der Erwartungswert von X, also $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ f.s.. Wenn wir nun noch Eigenschaft (9) aus Satz 2.9 betrachten, so können wir für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ den Begriff beste Vorhersage genauer spezifizieren. Die bedingte Erwartung minimiert dabei den L^2-Abstand zu X. Die folgenden Beispiele sollen dieses Resultat noch etwas besser verdeutlichen.

Beispiel 2.11. *Seien* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *und* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, *dann ist* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ *f.s..*

Beispiel 2.12. *Seien* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *und* $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c\Omega\}$ *mit* $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$ *und* $A \neq \Omega$, *dann ist*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(x) := \begin{cases} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} & \textit{f.s. falls } x \in A \\ \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A^c})}{\mathbb{P}(A^c)} & \textit{f.s. falls } x \in A^c \end{cases}$$

Beispiel 2.13. *Sei* λ *das Lebesgue-Maß auf dem Intervall* $[0, 1)$. *Seien weiters* $\Omega_1 = [0, \frac{1}{4})$, $\Omega_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\Omega_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $\Omega_4 = [\frac{3}{4}, 1)$, $\mathcal{F} = \sigma(\Omega_i, i \in \{1, 2, 3, 4\})$ *und* $X(x) := x$ *für* $x \in [0, 1)$. *Wir betrachten nun die vier unterschiedlichen Fälle.*

- $x \in [0, \frac{1}{4})$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(x) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\Omega_1})}{\lambda(\Omega_1)} = 4\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x dx = \frac{1}{8}$ *f.s.*.
- $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(x) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\Omega_2})}{\lambda(\Omega_2)} = 4\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{3}{8}$ *f.s.*.
- $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(x) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\Omega_3})}{\lambda(\Omega_3)} = 4\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x dx = \frac{5}{8}$ *f.s.*.
- $x \in [\frac{3}{4}, 1)$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(x) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\Omega_4})}{\lambda(\Omega_4)} = 4\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} x dx = \frac{7}{8}$ *f.s.*.

Wie in Abbildung 2.1 ersichtlich, ist die bedingte Erwartung stückweise f.s. konstant und liefert jeweils den durchschnittlichen Wert der Funktion auf dem gegebenen Intervall. Würden wir die Intervalle verfeinern, so erhalten wir eine genauere Approximation von X.

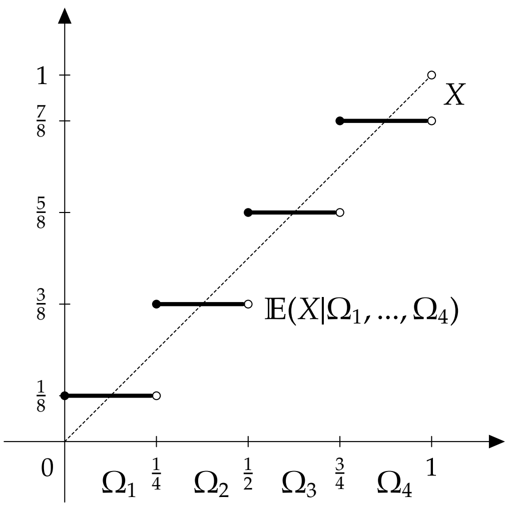

Abbildung 2.1: Bedingte Erwartung von $X := Id$ auf $[0, 1)$

Zusammengefasst können wir die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ als Prognose mit dem aktuellen Wissenstand $\mathcal{F}$ verstehen.

Kapitel 3

Martingale

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Grundlagen, die wir später noch benötigen werden. Seien dazu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $I \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Indexmenge.

Definition 3.1. *Ist $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ eine aufsteigende Folge von Sub-σ-Algebren auf einem messbaren Raum, das heißt es gilt:*

$$\forall m, n \in I, m \leq n : \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$$

*so heißt $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ **Filtration**.*

Wenn wir nun $\mathcal{F}_n$ als den zum Zeitpunkt n zur Verfügung stehenden Wissensstand betrachten, so können wir uns eine Filtration $(\mathcal{F}_n)$ als zeitlichen Verlauf des Informationsgewinns vorstellen. Haben wir nun weiters den messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$ gegeben, so sind wir daran interessiert, dass die Zufallsvariable $X_n : \Omega \to \Omega'$ zum Zeitpunkt n vollständig beobachtbar, das heißt $\mathcal{F}_n$-messbar, ist.

Definition 3.2. *Sei $X = (X_n)_{n\in I}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\Omega', \mathcal{F}')$ und $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ eine Filtration. X heißt (an $(\mathcal{F}_n)$) **adaptiert**, falls*

$$\forall n \in I : X_n : \Omega \to \Omega' \quad \mathcal{F}_n - \mathcal{F}'\text{-messbar ist.}$$

Sei nun $I = \mathbb{N}_0$.

Definition 3.3. *Ein stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\Omega', \mathcal{F}')$ heißt **vorhersagbar** (oder **previsibel**) bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls X_0 konstant ist und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} - \mathcal{F}'\text{-messbar.}$$

Definition 3.4. *Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ heißt **Stoppzeit** (bezüglich $(\mathcal{F}_n)$), falls*

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0$$

oder äquivalent[1]

$$\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0.$$

Mit dieser Definition können wir später Zeitpunkte bestimmen, in denen gewisse Ereignisse eingetreten sind, ohne dabei Wissen aus der Zukunft zu verwenden. Mit der bereits geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage den Begriff eines Martingals zu definieren.

Definition 3.5. *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$. Ist X an $(\mathcal{F}_n)$ adaptiert und X_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ integrierbar, so bezeichnet man X als* ***Martingal*** *(bezüglich $\mathbb{P}$ und $(\mathcal{F}_n)$), falls für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n > m$ gilt:*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m \qquad \textit{fast sicher.}$$

Bemerkung 3.6. *Ist $m \in \mathbb{N}_0$, so reicht es aus, jeweils nur $n = m + 1$ zu betrachten, denn nach der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung (Satz 2.9 (4)) ist*

$$\mathbb{E}(X_{m+2}|\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_{m+2}|\mathcal{F}_{m+1})|\mathcal{F}_m\Big)$$

und wenn die definierende Gleichung in einem Zeitschritt gilt, dann zieht sie sich durch in den zweiten Zeitschritt und so fort.
Somit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \qquad \textit{fast sicher.}$$

Satz 3.7. *Seien alle Variablen wie in Definition 3.5. Definieren wir nun zusätzlich den Zuwachsprozess $\Delta X_k := X_k - X_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so lässt sich die Martingaleigenschaft äquivalent schreiben als*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \mathbb{E}(\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0 \qquad \textit{fast sicher.}$$

Beweis. Unter Verwendung der Linearität aus Satz 2.9 und Bemerkung 3.6 gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} = X_{n-1} - X_{n-1} = 0 \quad \text{f.s..}\end{aligned}$$

□

[1] da $\{\tau \le n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau = k\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \setminus \{\tau \le n-1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Beispiele

Wir beginnen zunächst mit einfacheren Beispielen. Sei dazu stets $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$.

Beispiel 3.8 (sukzessive Prognose). *Sei $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann wird durch*

$$X_n := \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ definiert. Denn X_n ist nach Definition der bedingten Erwartung $\mathcal{F}_n$-messbar und somit ist (X_n) der gegebenen Filtration adaptiert. Gemäß der Turmeigenschaft (Satz 2.9 (4)) gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$:

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_m) = X_m \quad f.s..$$

Das folgende Beispiel ist in [Lus13] (Beispiel 1.7 (a)) zu finden.

Beispiel 3.9. *Ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat $(\mathcal{F}_n)$-**unabhängige Zuwächse**, falls*

$$\sigma(\Delta X_{n+1}) \textit{ und } \mathcal{F}_n \textit{ unabhängig sind für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei nun $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter L^1-Prozess mit der Eigenschaft, dass $\sigma(Z_{n+1})$ und $\mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unabhängig sind. Der $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter L^1-Prozess hat

$$X_n := \sum_{k=0}^{n} Z_k, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$(\mathcal{F}_n)$-unabhängigen Zuwächse $\Delta X_n = Z_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.7 ist (X_n) genau dann ein Martingal, wenn

$$\mathbb{E}(\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0.$$

Nachdem $\sigma(Z_{n+1})$ und $\mathcal{F}_n$ unabhängig sind folgt nach Satz 2.9 (6) für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{E}(\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{n+1}).$$

Das heißt (X_n) ist genau dann ein Martingal, wenn $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Konvergenz von Martingalen

Seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\Big)$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}$ und $(\mathcal{F}_n)$. Wir stellen uns nun die Frage, ob für das Martingal X ein fast sicherer Grenzwert X_∞ existiert.

3.3 Upcrossing Lemma

Die Herangehensweise ist schnell erklärt. Sei $\omega \in \Omega$. Angenommen $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existiert nicht, so ist $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$. Somit muss $X_n(\omega)$ über ein Intervall $[a, b]$ mit $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$ unendlich oft hin- und herspringen. Deswegen sind wir daran interessiert, die Anzahl der „upcrossings", also wie oft das Intervall $[a, b]$ nach oben hin überquert wird, zu analysieren.
Wir können nun Funktionen angeben, die uns den Zeitpunkt des k-ten Aufstiegs (T_k) beziehungsweise des k-ten oder wie in Abbildung 3.1 $(k-1)$-ten Abstiegs (S_k) über das Intervall $[a, b]$ angeben.

$$\begin{aligned} S_k(\omega) &:= \inf\{n \geq T_{k-1}(\omega) : X_n(\omega) \leq a\} && k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega, \\ T_k(\omega) &:= \inf\{n \geq S_k(\omega) : X_n(\omega) \geq b\} && k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega, \\ T_0 &:= 0 \text{ und } S_0 := 0 \end{aligned}$$

Satz 3.10. *Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so sind S_k und T_k Stoppzeiten.*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen zunächst, dass S_k eine Stoppzeit ist, also $\{S_k = n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Behauptung werden wir nun mittels Induktion beweisen.
Induktionsvoraussetzung: $\{S_k = n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes n $\in \mathbb{N}_0$
Induktionsanfang ($k = 0$): $\{S_0 = n\} = \{0 = n\} = \begin{cases} \Omega \in \mathcal{F}_n & \text{falls } n = 0 \\ \emptyset \in \mathcal{F}_n & \text{sonst.} \end{cases}$
Induktionsschritt ($k \to k + 1$): Zu zeigen ist, dass $\{S_{k+1} = n\} \in \mathcal{F}_n$

$$\{S_{k+1} = n\} = \{X_n \leq a\} \cap \{T_k \leq n\} \cap \bigcap_{l=0}^{n-1} (\{X_l > a\} \cup \{T_k > l\})$$

Wann liegt nun dieser Term in $\mathcal{F}_n$? Da abzählbare Vereinigung und Schnitt in der σ-Algebra enthalten sind, reicht es aus, dass die einzelnen Mengen in $\mathcal{F}_n$ liegen. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\{X_n \leq a\} \in \mathcal{F}_n, \{X_l > a\} \in \mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}_n \text{ für alle } l \leq n-1, \\ &\{T_k \leq n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{T_k = j\} = \bigcup_{j=0}^{n} (\{X_j \geq b\} \cap \{S_k \leq j\} \cap \bigcap_{l=0}^{j-1} (\{X_l < b\} \cup \{S_j > l\})) \in \mathcal{F}_n, \end{aligned}$$

da $\{X_j \geq b\} \in \mathcal{F}_n$ mit $j \leq n$, $\{X_l < b\} \in \mathcal{F}_n$ mit $l < n$, nach Induktionsvoraussetzung $\{S_k \leq j\} \in \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_n$ und somit auch $\{S_j > l\} = \{S_j \leq l\}^c \in \mathcal{F}_n$ mit $j \leq n$ sind.
Aus Letzterem folgt $\{T_k > l\} = \{T_k \leq l\}^c \in \mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}_n$ für $l \leq n - 1$. Daher wissen wir, dass $\{S_{k+1} = n\} \in \mathcal{F}_n$ liegt und somit S_k für $k \in \mathbb{N}_0$ eine Stoppzeit ist.
Da $\{T_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ist auch T_k eine Stoppzeit mit $k \in \mathbb{N}_0$. □

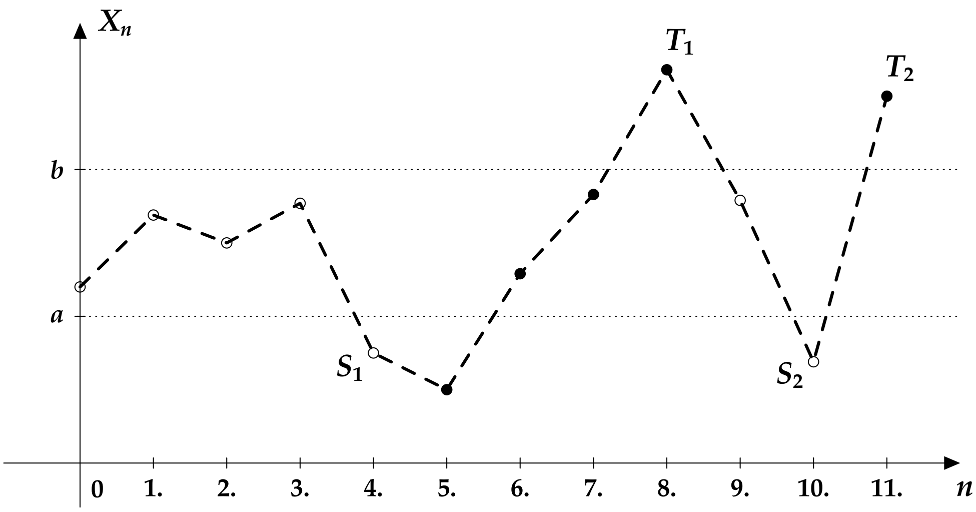

Abbildung 3.1: Veranschaulichung von S_k und T_k

Unser Interesse bezieht sich nun auf die Anzahl der „upcrossings“. Wir definieren uns daher eine Funktion $U_n^{[a,b]}$, die uns die Anzahl der aufsteigenden Überquerungen über das Intervall $[a, b]$ bis zum Zeitpunkt n liefert.

$$U_n^{[a,b]}(\omega) := \sup\{k \in \mathbb{N} : T_k(\omega) \leq n\} \qquad n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega \tag{3.1}$$

Beispiel 3.11. *Betrachten wir nun $X_n(\omega)$ aus Abbildung 3.1 mit $\omega \in \Omega$, so erhalten wir für die Anzahl der Überquerungen bis zum Zeitpunkt 7, 9 und 11:*
$U_7^{[a,b]}(\omega) = 0$
$U_9^{[a,b]}(\omega) = 1$
$U_{11}^{[a,b]}(\omega) = 2$

Im folgenden Lemma werden wir die erwartete Anzahl an Überquerungen $\mathbb{E}(U_n^{[a,b]})$ zum Zeitpunkt n für ein Martingal nach oben abschätzen.

Lemma 3.12 (Upcrossing Lemma)**.** *Seien $X = (X_n)$ ein Martingal, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $U_n^{[a,b]}$ wie in* (3.1)*. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(U_n^{[a,b]}) \leq \frac{\mathbb{E}\Big((X_n - a)^+\Big) - \mathbb{E}\Big((X_0 - a)^+\Big)}{b - a} \leq \frac{\mathbb{E}\Big((X_n - a)^+\Big)}{b - a}$$

Beweis. Wir definieren den Prozess

$$H_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{S_k + 1, ..., T_k\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt für $H := (H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wird in den aufsteigenden Abschnitten der Wert 1 gewählt. Die Zeitpunkte, in denen $H_n(\omega)$ den Wert 1 annimmt, wurden in der

Abbildung 3.1 mit schwarz gefüllten Kreisen visualisiert. H ist nicht negativ und vorhersagbar, da für $n \in \mathbb{N}$

$$\{H_n = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{S_k \le n-1\} \cap \{T_k > n-1\} \Big)$$

und alle Ereignisse in $\mathcal{F}_{n-1}$ liegen. Setze $Y_n = (X_n \vee a)$, $Y := (Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und

$$Z(H,Y)_n = \sum_{j=1}^{n} H_j(Y_j - Y_{j-1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Ist $k \in \mathbb{N}$ und $T_k < \infty$, so ist offenbar $Y_{T_i} - Y_{S_i} = Y_{T_i} - a \ge b - a$ für jedes $i \le k$, also ist

$$Z(H,Y)_{T_k} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=S_i+1}^{T_i} (Y_j - Y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{k} (Y_{T_i} - Y_{S_i}) \ge k(b-a).$$

Für alle $j \in \{T_k, ..., S_{k+1}\}$ ist $Z(H,Y)_j = Z(H,Y)_{T_k}$ und für alle $j \in \{S_k + 1, ..., T_k\}$ ist $Z(H,Y)_j \ge Z(H,Y)_{S_k} = Z(H,Y)_{T_{k-1}}$. Daher ist für $n \in \mathbb{N}$: $Z(H,Y)_n \ge (b-a)U_n^{[a,b]}$. Weiters ist $0 \le (1-H) \in \mathcal{F}_{n-1}$, $Y_n \ge a$ und $Y_n \ge X_n$. Somit gilt mit der Martingaleigenschaft von X, der Linearität, Monotonie und Eigenschaft (3) aus Satz 2.9:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \ge a \text{ (f.s.)} \quad \wedge \quad \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) &\ge \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \text{ (f.s.)} \\
\Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) &\ge (X_{n-1} \vee a) = Y_{n-1} \text{ (f.s.)}, \\
\mathbb{E}\Big(Z((1-H),Y)_n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \sum_{k=1}^{n} (1-H_k)\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (1-H_k)\Big(\mathbb{E}(Y_k|\mathcal{F}_{k-1}) - Y_{k-1}\Big) \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} (1-H_k)(Y_{k-1} - Y_{k-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Nun ist $Y_n - Y_0 = Z(1,Y)_n = Z(H,Y)_n + Z((1-H),Y)_n$, also

$$\mathbb{E}(Y_n - Y_0) \ge \mathbb{E}(Z(H,Y)_n) \ge (b-a)\mathbb{E}(U_n^{a,b}).$$

Die Aussage folgt nun mit $(X_n - a)^+ = Y_n - a$. Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{E}\Big((X_0 - a)^+\Big) \ge 0$ ist. □

Dieses Lemma bietet nun die Grundlage für den Martingalkonvergenzsatz.

Satz 3.13 (Martingalkonvergenzsatz)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$. Dann existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(|X_\infty|) < \infty$ und $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty$ fast sicher.*

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Klarerweise gilt $\mathbb{E}[(X_n - a)^+] \leq |a| + \mathbb{E}(X_n^+)$. Somit folgt aus dem Upcrossing Lemma (Lemma 3.12) und den Voraussetzungen

$$\mathbb{E}(U_n^{[a,b]}) \leq \frac{|a| + \mathbb{E}(X_n^+)}{b-a} < \infty.$$

Offensichtlich ist $U_n^{[a,b]}$ monoton steigend und $U_n^{[a,b]} < \infty$ fast sicher. Somit existiert der fast sichere Limes $U^{[a,b]} := \lim_{n\to\infty} U_n^{[a,b]}$. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz (Satz 1.36) gilt $\mathbb{E}(U^{[a,b]}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(U_n^{[a,b]}) < \infty$. Daher ist auch $U^{[a,b]} < \infty$ f.s. und dadurch $\mathbb{P}(U^{[a,b]} < \infty) = 1$. Nun definieren wir die $\mathcal{F}_\infty$-messbaren Ereignisse

$$C_{[a,b]} = \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < a\right\} \cap \left\{\limsup_{n\to\infty} X_n > b\right\} \subset \{U^{[a,b]} = \infty\}$$

und

$$C = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} C_{[a,b]}$$

Dann gilt $\mathbb{P}(C_{[a,b]}) = 0$ und damit auch $\mathbb{P}(C) = 0$. Per Konstruktion ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jedoch auf C^c konvergent. Also existiert der fast sichere Limes $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. Jedes der X_n ist $\mathcal{F}_\infty$-messbar, also ist X_∞ auch $\mathcal{F}_\infty$-messbar.
Zu zeigen bleibt nun noch, dass $\mathbb{E}(|X_\infty|) < \infty$ ist. Dazu verwenden wir die Linearität des Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(X_\infty^+ + X_\infty^-) = \mathbb{E}(X_\infty^+) + \mathbb{E}(X_\infty^-)$$

Nach dem Lemma von Fatou (Satz 1.37) ist

$$\mathbb{E}(X_\infty^+) \leq \sup\{\mathbb{E}(X_n^+) : n \geq 0\} < \infty.$$

Anderseits gilt, da X ein Martingal ist, wieder mit Hilfe Fatous Lemma

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_\infty^-) &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^-) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^+ - X_n)\\ &\leq \sup\{\mathbb{E}(X_n^+) : n \geq 0\} - \mathbb{E}(X_0) < \infty.\end{aligned}$$

□

Satz 3.14 (Konvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale). *Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dann existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable X_∞ mit $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty$ fast sicher und in L^1. Weiters gilt, dass $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ f.s. für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Sei $\mathcal{E} > 0$. Das heißt es existiert ein $0 \leq g \in L^1$, sodass $\sup\limits_{n\geq 0} \int\limits_{\{|X_n|>g\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \mathcal{E}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}(X_n^+) \leq \mathbb{E}(|X_n|) = \int\limits_{\{|X_n|\leq g\}} |X_n| \, d\mathbb{P} + \int\limits_{\{|X_n|>g\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(g) + \int\limits_{\{|X_n|>g\}} |X_n| \, d\mathbb{P}$$

und somit

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^+) \leq \mathbb{E}(g) + \sup_{n\geq 0} \int\limits_{\{|X_n|>g\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(g) + \mathcal{E} < \infty.$$

Satz 3.13 liefert nun die Existenz des fast sicheren Limes X_∞. Zusätzlich gilt nach Satz 1.35 $\mathbb{E}(|X_n - X_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Seien nun $n \geq m \in \mathbb{N}$. Korollar 2.10 liefert somit durch diese L^1-Konvergenz bereits die L^1-Konvergenz der bedingten Erwartungen $\mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m)\big|\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da X ein Martingal ist, so gilt $|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - X_m| = 0$ fast sicher. Eine Addition von 0, die Dreiecksungleichung und die Linearität des Erwartungswertes liefern also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m) - X_m\big|\Big) &\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)\big| + \big|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - X_m\big|\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m)\big|\Big) + \mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) - X_m\big|\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathbb{E}\Big(\big|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m) - X_m\big|\Big) = 0$ und somit folgt $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_m) = X_m$ fast sicher. □

Wenn wir nun Satz 3.14 genauer betrachten, so können wir feststellen, dass nun der Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ wiederum ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ ist.

3.4 Doobsche Maximalungleichung

Da wir jetzt noch auf den Konvergenzsatz in L^p hinarbeiten wollen, so kommen wir nicht um die Doobsche Maximalungleichung herum.

Definition 3.15. *Ist (X_n) ein stochastischer Prozess, so setzen wir*

$$\begin{aligned}
X_n^* &:= \sup_{0\leq i\leq n} |X_i|, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \\
X^* &:= \sup_{i\in\mathbb{N}_0} |X_i|.
\end{aligned}$$

Satz 3.16 (Doobsche Maximalungleichung)**.** *Sei (X_n) ein Martingal und $\lambda > 0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:*

$$\lambda \mathbb{P}(X_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{X_n^*\geq\lambda\}}).$$

Beweis. Wir setzen zunächst $A := \{X_n^* \geq \lambda\}$. Definieren wir nun weiters die Mengen

$$A_0 := \{|X_0| \geq \lambda\},$$
$$A_k := \{|X_k| \geq \lambda\} \backslash \Big(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \Big), \quad k = 1, ..., n$$

Die Mengen A_i sind nach Definition offensichtlich disjunkt und es gilt $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Mit dieser Wahl ist $A_k \in \mathcal{F}_k := \sigma(X_0, ..., X_k)$ und $|X_k|\mathbb{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{1}_{A_k}$. Somit gilt mit Hilfe der Monotonie des Erwartungswertes $\mathbb{E}(|X_k|\mathbb{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(\lambda \mathbb{1}_{A_k}) = \lambda \mathbb{P}(A_k)$. Durch Aufsummieren aller Werte erhalten wir:

$$\lambda \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|\mathbb{1}_{A_k}) \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{A_k}) = \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{A}) = \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}})$$

Für (∗) verwenden wir die Dreiecksungleichung (Satz 2.9 (5)) und die Martingaleigenschaft von (X_n). Das heißt für alle $k < n$ folgt

$$\mathbb{E}\Big(|X_n| \Big| \mathcal{F}_k\Big) \geq \Big|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_k)\Big| = |X_k| \quad \text{f.s..}$$

Nach Definition der bedingten Erwartung gilt für alle $A_k \in \mathcal{F}_k$

$$\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(|X_k|\mathbb{1}_{A_k}).$$

□

Diese Doobsche Maximalungleichung liefert einen wichtigen Beitrag für den Beweis des L^p-Konvergenzsatzes. Jetzt zeigen wir noch eine weitere Ungleichung.

Lemma 3.17. *Es seien X und Y nicht-negative Zufallsvariablen, für die*

$$\lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}}) \quad \textit{für alle } \lambda \geq 0$$

gilt. Dann folgt für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$||X||_p \leq q||Y||_p.$$

Beweis. Wir verwenden die vorausgesetzte Ungleichung und multiplizieren auf beiden Seiten den Faktor $p\lambda^{p-2}$ hinzu. Nachdem $\lambda \geq 0$ ist, bleibt uns die Ungleichung erhalten. Nun integrieren wir beide Seiten über alle λ. Da die Ungleichung für alle λ gilt, folgt:

$$\int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(X \geq x) dx \leq \int_0^\infty p x^{p-2} \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}) dx$$

Betrachten wir die linke Seite, so ist der Integrand nicht-negativ. Wir können den Satz von Fubini anwenden:

$$\int_0^\infty px^{p-1} \int_{\{X\geq x\}} d\mathbb{P}(y)\, dx = \int \int \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{\{X\geq x\}}(y) px^{p-1} dx\, d\mathbb{P}(y)$$

$$= \int \int_0^{X(y)} px^{p-1} dx\, d\mathbb{P}(y) = \int X(y)^p d\mathbb{P}(y) = \mathbb{E}(X^p)$$

Auch bei der rechten Seite ist der Integrand nicht-negativ und wir können auch hier Fubini anwenden:

$$\int_0^\infty px^{p-2} \int Y(y)\mathbb{1}_{\{X\geq x\}}(y) d\mathbb{P}(y)\, dx = \int \int Y(y)\mathbb{1}_{\{X\geq x\}}(y)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) px^{p-2} dx\, d\mathbb{P}(y)$$

$$= \int Y(y)\Big(\int_0^{X(y)} px^{p-2} dx\Big) d\mathbb{P}(y) = \int Y \frac{p}{p-1} X^{p-1} d\mathbb{P} = \frac{p}{p-1}\mathbb{E}(YX^{p-1}) = q\mathbb{E}(YX^{p-1})$$

Mit der Hölder Ungleichung[2] erhalten wir:

$$\mathbb{E}(X^p) \leq q\mathbb{E}(YX^{p-1}) = q\|YX^{p-1}\|_1 \leq q\|Y\|_p\|X^{p-1}\|_q$$

Betrachten wir nun die möglichen Fälle.
Fall 1: Ist $\|Y\|_p = \infty$, so ist die Aussage klarerweise erfüllt.
Fall 2: Sei nun $\|Y\|_p < \infty$ und $\|X\|_p < \infty$, dann gilt unter der Verwendung von $(p-1)\cdot q = p$

$$\|X^{p-1}\|_q = \mathbb{E}(X^p)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

und somit auch

$$\mathbb{E}(X^p) \leq q\|Y\|_p\mathbb{E}(X^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Division durch $\mathbb{E}(X^p)^{\frac{1}{q}}$ liefert

$$\mathbb{E}(X^p)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}(X^p)^{1-\frac{1}{q}} \leq q\|Y\|_p \Leftrightarrow \|X\|_p \leq q\|Y\|_p.$$

Fall 3: Ist jetzt $\|X\|_p = \infty$, so betrachten wir die Zufallsvariablen $X_n := X \wedge n$ mit $n \in \mathbb{N}$. X_n erfüllt die Voraussetzungen mit $\|X_n\|_p < \infty$ und somit gilt $\|X \wedge n\|_p \leq q\|Y\|_p$. Die Behauptung folgt durch Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz auf die Folge (X_n^p)

$$\|X\|_p^p = \int \lim_{n\to\infty} X_n^p d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int X_n^p d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p^p \leq q\|Y\|_p^p.$$

□

[2] Seien $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt für zwei messbare Funktionen f,g: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Mit den vorangegangen Ungleichungen können wir nun dieses Resultat für nicht-negative Martingale zeigen.

Satz 3.18. *Sei* (X_n) *ein Martingal. Dann gilt für* $p > 1$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

$$\|X_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p.$$

Insbesondere folgt $\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_p$.

Beweis. Für festes $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $X := X_n^*$ und $Y := X_n$. Diese Definition erfüllt die Maximalungleichung von Doob 3.16 und somit auch die Voraussetzungen für Lemma 3.17. Da $q = \frac{p}{p-1}$ gilt $\|X\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|Y\|_p$. Der Zusatz folgt nun durch Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz auf $0 \leq X_n^* \uparrow X^*$. □

Satz 3.19 (L^p-Konvergenzsatz für Martingale)**.** *Seien* $1 < p < \infty$ *und* $X := (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein* L^p*-beschränktes Martingal (siehe Definition 1.33). Dann existiert eine* $\mathcal{F}_\infty$*-messbare Zufallsvariable* X_∞ *mit* $\mathbb{E}(|X_\infty|^p) < \infty$*, sowie* $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty$ *fast sicher und in* L^p*. Speziell ist* $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Nachdem X L^p-beschränkt ist, also $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(|X_k|^p) < \infty$, folgt durch Korollar 1.34, dass X gleichgradig integrierbar ist. Satz 3.14 liefert nun die Existenz des fast sicheren Limes X_∞. Weiters erhalten wir durch Satz 3.18

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} |X_k|^p\Big) = \|X^*\|_p^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_p^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty.$$

Das heißt $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} |X_k|^p \in L^1$. Natürlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $|X_n|^p \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} |X_k|^p$. Somit ist

$$\inf_{0\leq g\in L^1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>g\}} |X_n|^p \, d\mu = 0 \quad \text{erfüllt mit } g = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} |X_k|^p.$$

Das bedeutet $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar. Da $X_\infty \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|$ liefert majorisierte Konvergenz (Korollar 1.38) (wegen $|X_n - X_\infty|^p \leq 2^p \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|^p$)

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(|X_n - X_\infty|^p) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes können wir folgendes Resultat zeigen, welches in einer ähnlichen Form in [Øks03] als Corollary C.9. zu finden ist.

Korollar 3.20. *Sei $X \in L^2$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty) \qquad \text{f.s. und in } L^2.$$

Beweis. $M_n := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, ist beschränkt in L^2, denn nach Korollar 2.10 (Kontraktion) gilt

$$\|M_n\|_2 = \|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\|_2 \leq \|X\|_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

und somit auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|M_n\|_2 \leq \|X\|_2 < \infty.$$

Damit existiert nach Satz 3.19 eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable M_∞ mit $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty$ f.s. und in L^2. Zu zeigen bleibt, dass $M_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ f.s.. Weil $M_n = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n)$ f.s., gilt nach Korollar 2.10 (Kontraktion):

$$\|M_n - \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)\|_2 = \|\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)\|_2 \leq \|M_n - M_\infty\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Für $F \in \mathcal{F}_{n_0}$ und $n \geq n_0$ erhalten wir dadurch unter Verwendung der Cauchy Schwarz Ungleichung und der Tatsache, dass $\mathbb{P}(F) \leq 1$ ist

$$0 \leq \left|\int_F X - M_\infty \, d\mathbb{P}\right| = \left|\int_F \mathbb{E}(X - M_\infty|\mathcal{F}_n) \, d\mathbb{P}\right| \leq \int_F \Big(M_n - \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)\Big)^2 \, d\mathbb{P} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daher gilt

$$\int_F X - M_\infty \, d\mathbb{P} = 0 \qquad \text{für alle } F \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n.$$

Da $\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\Big)$ folgt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_\infty) = M_\infty \qquad \text{f.s..}$$

□

Beispiel 3.21. *Wenn wir nun das Martingal aus Beispiel 3.8 betrachten. Seien dazu $Y \in L^2([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\Big([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}), i \in \{1, \dots, n-1\}\Big)$ für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}_{[0,1)}$ ist. Weiters wissen wir nach Korollar 3.20:*

$$X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{B}_{[0,1)}) = Y \quad \text{f.s.}$$

Das heißt $X_n \xrightarrow{n\to\infty} Y$ f.s. und in L^2.

Kapitel 4

Das Haarsystem

Ein möglicher Anwendungsfall der Konvergenztheorie von Martingalen ist das Haarsystem. Dieser Abschnitt basiert auf den Büchern von [Lus13] und [Wer11]. Sei im Folgenden der verwendete Maßraum $([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$.

Definition 4.1. *Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen auf $[0,1)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{0,...,2^m-1\}$ und $n = 2^m + j$, wobei*

$$
\begin{aligned}
h_0 &:= \mathbb{1}_{[0,1)} \\
h_n = h_{2^m+j} &:= 2^{\frac{m}{2}}(\mathbb{1}_{[\frac{2j}{2^{m+1}}, \frac{2j+1}{2^{m+1}})} - \mathbb{1}_{[\frac{2j+1}{2^{m+1}}, \frac{2j+2}{2^{m+1}})})
\end{aligned}
$$

*heißt **Haarsystem**.*

Seien nun n, m und j wie in Definition 4.1,

$$
\begin{aligned}
I_0^0 &:= [0,1) \\
I_i^n &:= \begin{cases} [\frac{2i}{2^{m+1}}, \frac{2i+1}{2^{m+1}}) & \text{falls } i \in \{0,...,2j+1\} \\ [\frac{2i}{2^m}, \frac{2i+1}{2^m}) & \text{falls } i \in \{2j+2,...,n\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

und $\mathcal{F}_n := \sigma(h_0,...,h_n)$. Um die Definition und die Entwicklung des Haarsystems besser zu verstehen, sind die ersten 4 Funktionen in Abbildung 4.1 dargestellt. Zusätzlich ist dabei auch die n-te Haarfunktion ersichtlich. Wie wir nun in Abbildung 4.1 sehen, ist $h_n \neq 0$ genau auf $I_{2j}^n \cup I_{2j+1}^n$ oder anders formuliert

$$\{h_n \neq 0\} = I_{2j}^n \cup I_{2j+1}^n. \tag{4.1}$$

Gehen wir nun weiter zu Abbildung 4.2, wo die weitere Entwicklung der σ-Algebra $\mathcal{F}_{n-1}$ auf $\mathcal{F}_n$ zu sehen ist. Wenn wir hier die einzelnen Intervalle betrachten, so kommen wir zu der Erkenntnis, dass $\mathcal{F}_n = \sigma(I_0^n, ..., I_n^n)$. Also anders gesagt sind $I_0^n, ..., I_n^n$ die Atome von $\mathcal{F}_n$. Zusätzlich kann man sich schnell davon überzeugen,

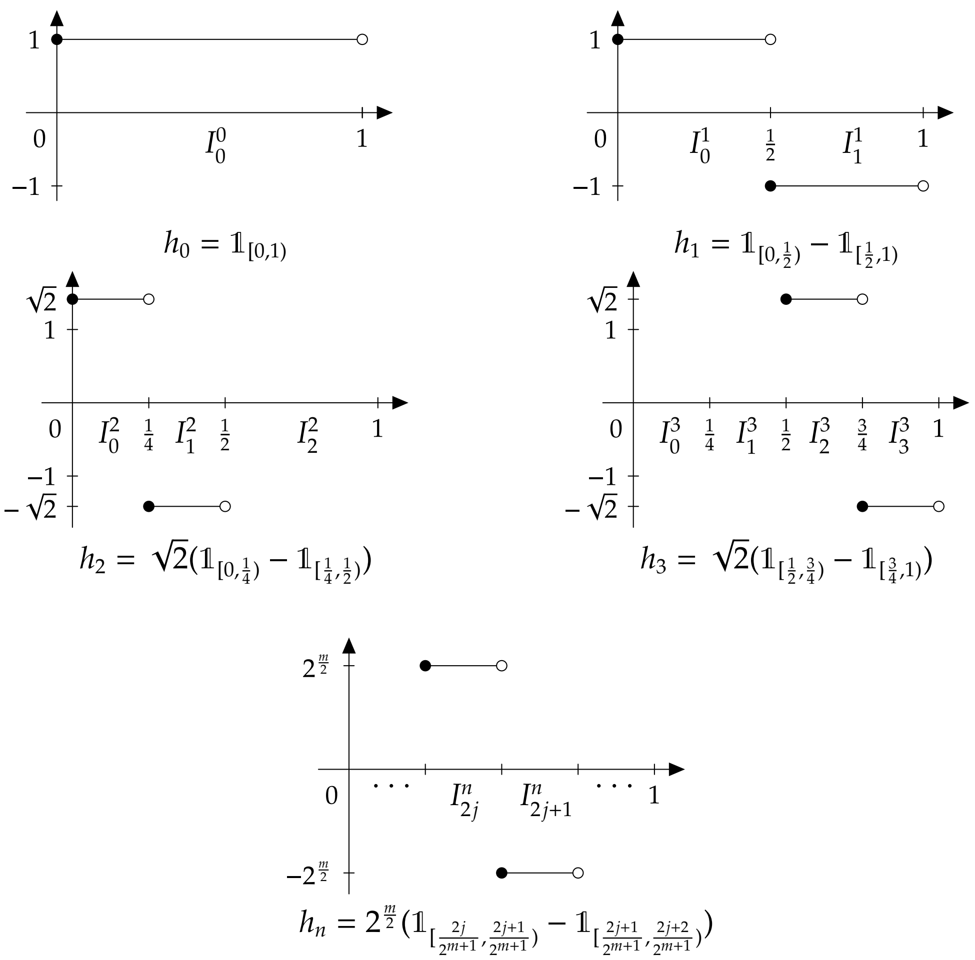

Abbildung 4.1: Darstellung der ersten vier und der n-ten Haarfunktion

dass I_{2j}^{n-1} in I_{2j}^n und I_{2j+1}^n aufgeteilt wird. Genauer gesagt gilt für $n > 0$

$$\begin{aligned} I_i^{n-1} &= I_i^n && \forall\, 0 \le i < 2j, \\ I_{2j}^{n-1} &= I_{2j}^n \cup I_{2j+1}^n && \text{und} \\ I_i^{n-1} &= I_{i+1}^n && \forall\, 2j < i < n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Weiters gilt für den Erwartungswert von h_n

$$\mathbb{E}(h_n) = \int\limits_{\{h_n \neq 0\}} h_n \, d\lambda = 0 \tag{4.3}$$

und für die σ-Algebra $\mathcal{F}_\infty$

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_m\Big) = \mathcal{B}_{[0,1)}.$$

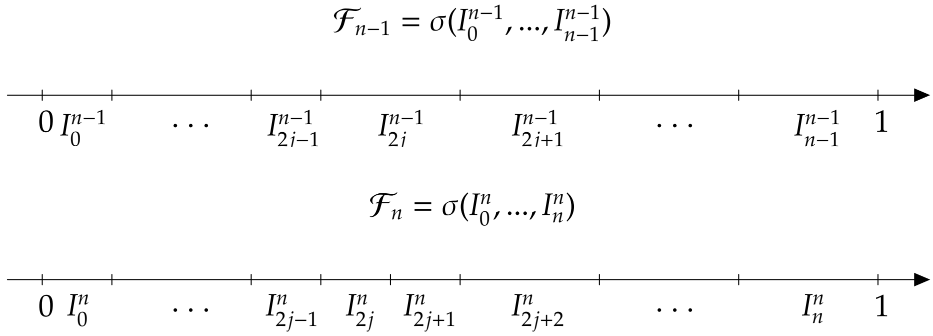

Abbildung 4.2: Entwicklung der Atome mit $n = 2^m + j > 0$

Definition 4.2. *Eine Teilmenge $S \subseteq H$ heißt* ***Orthonormalsystem****, falls $\|e\| = 1$ und $\langle e, f\rangle = 0$ für $e, f \in S, e \neq f$, gelten. Ein Orthonormalsystem S heißt* ***Orthonormalbasis****, falls*

$$\forall\ T \text{ Orthonormalsystem}, S \subseteq T : \ T = S$$

Wir wollen nun noch zeigen, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von L^2 ist.

Satz 4.3. *Sei $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *S ist eine Orthonormalbasis*
2. *$\forall x \in H : x = \sum\limits_{e\in S} \langle x, e\rangle e$.*

Beweis. Siehe [Wer11] Satz V.4.9. □

Satz 4.4. *$(h_n)_{n=0,...,l}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda)$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $(h_n)_{n=0,...,l}$ ein Orthonormalsystem ist. Dabei erinnern wir an die Definition des Skalarprodukts in $L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda)$ aus Bemerkung 1.27. Sei $n = 2^m + j \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\|h_n\|_2^2 = \int_0^1 h_n^2 \, d\lambda = \int_{\frac{2i}{2^{m+1}}}^{\frac{2j+2}{2^{m+1}}} 2^{\frac{m}{2}} \, d\lambda = 2^{\frac{m}{2}} \lambda\Big(\big[\frac{2i}{2^{m+1}}, \frac{2j+2}{2^{m+1}}\big)\Big) = 1.$$

Sei $n > k \in \mathbb{N}_0$. Weil $\{h_n \neq 0\} = I_{2j}^n \cup I_{2j+1}^n$ existiert nach dem Verwenden von Gleichung (4.2) ein $p \in \mathbb{N}_0$ mit $\{h_n \neq 0\} \subseteq I_p^k$. h_k ist auf I_p^k konstant. Das heißt es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I_p^k$ gilt: $h_k(x) = c$. Es folgt durch Gleichung (4.3)

$$\langle h_n, h_k\rangle = \int_{\{h_n\neq 0\}} h_k h_n \, d\lambda = c \int_{\{h_n \neq 0\}} h_n \, d\lambda = 0.$$

Somit ist $(h_n)_{n=0,\dots,l}$ ein Orthonormalsystem.
Da $\mathcal{F}_l = \sigma(I_0^l, \dots, I_l^l)$ gilt

$$\dim\,(h_n)_{n=0,\dots,l} = l + 1 = \dim lin\{\mathbb{1}_{I_n^k}\}_{n=0,\dots,l}.$$

Somit kann in jedem weiteren Orthonormalsystem T von $L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda)$ mit $S \subseteq T$ kein weiteres Element liegen und es gilt $T = S$. □

Satz 4.5. *Für $f \in L^2([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$ gilt für alle $l \in \mathbb{N}_0$ die Darstellung*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l) = \sum_{n=0}^{l} \langle f, h_n \rangle h_n$$

Beweis. Da $(I_n^l)_{n=0,\dots,l}$ eine Partition von $[0,1)$ ist, gilt nach Satz 2.8

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l) = \sum_{n=0}^{l} \mathbb{E}(f|I_n^l)\mathbb{1}_{I_n^l} \in L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda).$$

Da $(h_n)_{n=0,\dots,l}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda)$ gilt nach Satz 4.3

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l) = \sum_{n=0}^{l} \langle \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l), h_n \rangle h_n.$$

Nachdem $I_{2j}^n, I_{2j+1}^n \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_l$ folgt unter Verwendung der Eigenschaft der bedingten Erwartung für alle $n = 2^m + j \le l$

$$\langle \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l), h_n \rangle = 2^{\frac{m}{2}} \left(\int\limits_{I_{2j}^n} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l)\, d\lambda - \int\limits_{I_{2j+1}^n} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l)\, d\lambda \right) = 2^{\frac{m}{2}} \left(\int\limits_{I_{2j}^n} f\, d\lambda - \int\limits_{I_{2j+1}^n} f\, d\lambda \right) = \langle f, h_n \rangle$$

Somit ergibt sich

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l) = \sum_{n=0}^{l} \langle f, h_n \rangle h_n.$$

□

Bemerkung 4.6. *Ein alternativer Beweis von Satz 4.5 verwendet die Tatsache, dass $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_l)$ die Orthogonalprojektion auf $L^2([0,1), \mathcal{F}_l, \lambda)$ ist. Zu zeigen wäre also, dass $\sum_{n=0}^{l} \langle f, h_n \rangle h_n$ diese Orthogonalprojektion ist. Siehe dazu [Wer11] Satz V.4.8.*

Bemerkung 4.7. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ und $M_n := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i$. Aus Satz 4.3 folgt, dass $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ ist. Denn*

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{k=0}^{n} \Big\langle \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i h_i, h_k \Big\rangle h_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \langle h_i, h_k \rangle h_k = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i = M_n.$$

Mit der in der Konverzgenztheorie von Martingalen geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage zu zeigen, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$ ist.

Satz 4.8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Orthonormalbasis von* $L^2([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$

Beweis. Sei $f \in L^2([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$, dann folgt mit Hilfe von Korollar 3.20

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_m) \xrightarrow{m\to\infty} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{[0,1)}) = f \quad \text{f.s. und in } L^2.$$

Somit erhalten wir mit Satz 4.5

$$\sum_{n=0}^{m} \langle f, h_n\rangle h_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_m) = \xrightarrow{m\to\infty} f \quad \text{f.s. und in } L^2.$$

Damit gilt

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n\rangle h_n$$

und weiters mit Satz 4.3, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von L^2 ist. $\square$

Literatur

[AE06] Herbert Amann und Joachim Escher. *Analysis I. 3rd ed.* German. 3rd ed. Basel: Birkhäuser, 2006, S. xv + 445. ISBN: 3-7643-7755-0/pbk.

[AK06] Fernando Albiac und Nigel J. Kalton. *Topics in Banach space theory.* English. Berlin: Springer, 2006, S. xi + 373. ISBN: 0-387-28141-X/hbk.

[Dur05] Richard Durrett. *Probability. Theory and examples.* English. Pacific Grove, CA: Wadsworth &| Brooks/Cole Advanced Books &| Software, 2005, S. ix + 453. ISBN: 0-543-13206-5.

[Hof94] Jørgen Hoffmann-Jørgensen. *Probability with a view toward statistics. Vol 1: Probabilities.* English. London: Chapman & Hall, 1994, S. xl, 589. ISBN: 0-412-05221-0/hbk.

[Kle06] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* German. Berlin: Springer, 2006, xii + 602 p. ISBN: 3-540-25545-1/pbk. DOI: `10.1007/3-540-33414-9`.

[Lus13] Harald Luschgy. *Martingale in diskreter Zeit. Theorie und Anwendungen.* German. Berlin: Springer Spektrum, 2013, S. xiv + 458. ISBN: 978-3-642-29960-5/pbk; 978-3-642-29961-2/ebook. DOI: `10.1007/978-3-642-29961-2`.

[MS05] David Meintrup und Stefan Schäffler. *Stochastik. Theorie und Anwendungen.* German. Berlin: Springer, 2005, S. xiv + 609. ISBN: 3-540-21676-6/pbk. DOI: `10.1007/b137972`.

[Øks03] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Hochschultext / Universitext. Springer, 2003. ISBN: 9783540047582. URL: `https://books.google.at/books?id=kXw9hB4EEpUC`.

[Wen08] Jochen Wengenroth. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* German. Berlin: de Gruyter, 2008, S. xiii + 240. ISBN: 978-3-11-020358-5/pbk; 978-3-11-020359-2/ebook. DOI: `10.1515/9783110203592`.

[Wer11] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* German. 7th revised and expanded ed. Berlin: Springer, 2011, S. xiii + 552. ISBN: 978-3-642-21016-7/pbk; 978-3-642-21017-4/ebook. DOI: `10.1007/978-3-642-21017-4`.

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Bernhard Pöchtrager, erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Linz, März 2016

Bernhard Pöchtrager